**Inspectoratul Școlar al Județului Galați**

**Societatea de Științe Matematice din România**
**Filiala Galați**

**Colegiul Național "Vasile Alecsandri"**
**str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galați**

**Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"**
**ediția a XVIII-a**
**Galați, 4 noiembrie 2017**

**Clasa a XII –a**

***SOLUȚII***

**Problema 1.**

**Soluție. a)** Avem $\left(3+\sqrt{7}\right)^n = A_n + B_n \cdot \sqrt{3}$ , unde $A_n$ , $B_n \in \mathbb{N}$, de unde rezultă că

$\left(3-\sqrt{7}\right)^n = A_n - B_n \cdot \sqrt{3}$ . Atunci , ținând cont că $A_n \cdot T_1$ este perioadă pentru $f_1$, rezultă că

$$f_1\left(\left(3+\sqrt{7}\right)^n \cdot T_1\right) = f_1\left(\left(A_n + B_n \cdot \sqrt{7}\right)\cdot T_1\right) = f_1\left(\left(A_n \cdot T_1 + B_n \cdot \sqrt{7}\cdot T_1\right)\right) =$$

$$= f_1\left(\left(-A_n \cdot T_1 + B_n \cdot \sqrt{7}\cdot T_1\right)\right) = f_1\left(-\left(A_n - B_n \cdot \sqrt{7}\right)\cdot T_1\right) = f_1\left(-\left(3-\sqrt{7}\right)^n \cdot T_1\right) = f_1\left(a_n\right),$$

unde $a_n = -\left(3-\sqrt{7}\right)^n \cdot T_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ , întrucât $\left|3-\sqrt{7}\right| < 1$.

Analog , $\left(2+\sqrt{2}\right)^n = C_n + D_n \cdot \sqrt{3}$, unde $C_n$ , $D_n \in \mathbb{N}$, și la fel va rezulta că

$f_2\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^n \cdot T_2\right) = f_1\left(-\left(C_n - D_n \cdot \sqrt{2}\right)\cdot T_2\right) = f_2\left(-\left(2-\sqrt{2}\right)^n \cdot T_2\right) = f_2\left(b_n\right)$, unde

$b_n = -\left(2-\sqrt{2}\right)^n \cdot T_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ , întrucât $\left|2-\sqrt{2}\right| < 1$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1\left(\left(3+\sqrt{7}\right)^n \cdot T_1\right)}{f_2\left(\left(2+\sqrt{2}\right)^n \cdot T_2\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1\left(a_n\right)}{f_2\left(b_n\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_1\left(a_n\right)}{a_n} \cdot \dfrac{a_n}{b_n} \cdot \dfrac{b_n}{f_2\left(b_n\right)} = \dfrac{l_1}{l_2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}\right)^n = 0$ , deoarece se verifică imediat că $\left|\dfrac{3-\sqrt{7}}{2-\sqrt{2}}\right| < 1$

**b)** $f\left(x\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{2017^x - 1}{x} - \ln 2017\right)\sin^2 \dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} + \left(\ln 2017\right)\cdot \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ b & , x = 0 \end{cases}$ ,

unde $b = \dfrac{a}{\ln 2017}$ . Primul termen al sumei este o funcție continuă, deoarece

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2017^x - 1}{x} - \ln 2017\right)\cdot \sin^2 \dfrac{1}{x} = 0$ , iar funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\left(x\right) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ b & , x = 0 \end{cases}$

admite primitive pentru $b = \dfrac{1}{2}$ .

Într-adevăr, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\frac{2}{x}}{2}, & x\neq 0\\ b, & x=0\end{cases}=\dfrac{1}{2}-\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\cos\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}-b, & x=0\end{cases}=\dfrac{1}{2}-h(x)$,

iar $g$ admite primitive dacă și numai dacă $h$ admite primitive.

Pornind de la relația $\left(x^2\cdot\sin\dfrac{2}{x}\right)'=2\cdot x\cdot\sin\dfrac{2}{x}-2\cdot\cos\dfrac{2}{x}$, $x\neq 0$, rezultă că

$\dfrac{1}{2}\cdot\cos\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{2}{x}-\left(\dfrac{x^2}{4}\cdot\sin\dfrac{2}{x}\right)'$, iar funcția $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $k(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ fiind continuă pe $\mathbb{R}$ admite primitive. Considerând $K$ o primitivă a ei, rezultă că o primitivă a funcției $h$ în caz că aceasta există ar fi $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $H(x)=\begin{cases}K(x)-\dfrac{x^2}{4}\cdot\sin\dfrac{2}{x}+C_1, & x<0\\ C_2, & x=0\\ K(x)-\dfrac{x^2}{4}\cdot\sin\dfrac{2}{x}+C_3, & x>0\end{cases}$.

Din condiția de continuitate a funcției $H$ în $x=0$, avem $K(0)+C_1=C_2=K(0)+C_3$, deci $C_1=C_3=C-K(0)$, unde $C_2=C$, iar $H(x)=\begin{cases}K(x)-\dfrac{x^2}{4}\cdot\sin\dfrac{2}{x}+C-K(0), & x\neq 0\\ C, & x=0\end{cases}$.

Din condiția de derivabilitate în $x=0$ avem

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{H(x)-H(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{K(x)-K(0)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4}\cdot\sin\dfrac{2}{x}=k(0)=0$, deci există $H'(0)=0$, de unde rezultă că funcția $h$ admite primitive dacă și numai dacă $H'(0)=0=h(0)$, deci $b=\dfrac{1}{2}$, iar $a=\dfrac{1}{2}\ln 2017$.

**Problema 2.**

**Soluție. a)** Avem $(x\cdot y)^{n+1}=x\cdot y\cdot(x\cdot y)^n=x\cdot y\cdot x^n\cdot y^n$ și $(x\cdot y)^{n+1}=x^{n+1}\cdot y^{n+1}$, de unde rezultă că $x\cdot y\cdot x^n\cdot y^n=x^{n+1}\cdot y^{n+1}$, deci $y\cdot x^n=x^n\cdot y\quad(1)$.

Analog, din $(x\cdot y)^{n+2}=x\cdot y\cdot(x\cdot y)^{n+1}=x\cdot y\cdot x^{n+1}\cdot y^{n+1}$ și $(x\cdot y)^{n+2}=x^{n+2}\cdot y^{n+2}$, rezultă că $x\cdot y\cdot x^{n+1}\cdot y^{n+1}=x^{n+2}\cdot y^{n+2}$, deci $y\cdot x^{n+1}=x^{n+1}\cdot y\quad(2)$.

Dar din $(1)$ avem $x^{n+1}\cdot y=x\cdot x^n\cdot y=x\cdot y\cdot x^n$, iar din $(2)$, $x^{n+1}\cdot y=y\cdot x^{n+1}$, deci $x\cdot y\cdot x^n=y\cdot x^{n+1}$, de unde rezultă că $x\cdot y=y\cdot x$, așadar, grupul este comutativ.

**b)** Avem $(x\cdot y)^{n+2}=(x\cdot y)^n\cdot(x\cdot y)^2=x^n\cdot y^n\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y$, iar din ipoteză, $(x\cdot y)^{n+2}=x^{n+2}\cdot y^{n+2}$, de unde rezultă că $x^n\cdot y^n\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y=x^{n+2}\cdot y^{n+2}$, deci $y^n\cdot x\cdot y\cdot x=x^2\cdot y^{n+1}\quad(1)$.

Analog, din $(x\cdot y)^{n+4}=(x\cdot y)^{n+2}\cdot(x\cdot y)^2=x^{n+2}\cdot y^{n+2}\cdot x\cdot y\cdot x\cdot y$ și din $(x\cdot y)^{n+4}=x^{n+4}\cdot y^{n+4}$, va rezulta că $y^{n+2}\cdot x\cdot y\cdot x=x^2\cdot y^{n+3}\quad(2)$.

Dar $y^{n+2}\cdot x\cdot y\cdot x = y^2\cdot\left(\underbrace{y^n\cdot x\cdot y\cdot x}_{(1)}\right) = y^2\cdot x^2\cdot y^{n+1}$, de unde, ținând cont de $(2)$ , rezultă că

$x^2\cdot y^{n+3} = y^2\cdot x^2\cdot y^{n+1}$ , deci $x^2\cdot y^2 = y^2\cdot x^2$ , așadar, $x^2\cdot\left(y^k\right)^2 = \left(y^k\right)^2\cdot x^2$, pentru orice număr natural $k$ , adică are loc relația $x^2\cdot y^{2k} = y^{2k}\cdot x^2$, $\forall k\in\mathbb{N}$ $(3)$.

Vom analiza cazurile:

1) $n$ este număr par.

Atunci, conform relației $(3)$ vom avea $x^2\cdot y^n = y^n\cdot x^2$ , de unde, ținând cont de $(1)$, rezultă $y^n\cdot x\cdot y\cdot x = x^2\cdot y^{n+1} = \left(x^2\cdot y^n\right)\cdot y = \left(y^n\cdot x^2\right)\cdot y$ , deci

$y^n\cdot x\cdot y\cdot x = y^n\cdot x^2\cdot y$ , și simplificând la stânga, rezultă $y\cdot x = x\cdot y$ .

2) $n$ este număr impar, atunci $n+1$ este număr par, și conform relației $(3)$, vom avea $x^2\cdot y^{n+1} = y^{n+1}\cdot x^2$ , iar din $(1)$ rezultă $y^n\cdot x\cdot y\cdot x = x^2\cdot y^{n+1} = y^{n+1}\cdot x^2$ și simplificând la stânga prin $y^n\cdot x$ rezultă că $y\cdot x = x\cdot y$ .

**Problema 3.**

**Soluție.** Dacă $G = \left\{A_1, A_2, ..., A_k\right\}$ și $A\in G$ este o matrice oarecare a grupului, atunci elementele $A\cdot A_i$, $i\in\left\{1,2,...,k\right\}$ sunt distincte și aparțin lui $G$ , deci

$G = \left\{A\cdot A_1, A\cdot A_2, ..., A\cdot A_k\right\} = \left\{A_1, A_2, ..., A_k\right\}$, de unde rezultă că

$A\cdot A_1 + A\cdot A_2 + ... + A\cdot A_k = A_1 + A_2 + ... + A_k$ , adică $A\cdot S = S$, $\forall A = A_i\in G, i\in\left\{1,2,...,k\right\}$ , de unde, rezultă că $\sum_{i=1}^{k} A_i\cdot S = \sum_{i=1}^{k} S$ , ceea ce înseamnă $S^2 = k\cdot S$ $(1)$ .

De aici rezultă că $\left(S - k\cdot I_n\right)^2 = S^2 - 2k\cdot S + k^2 I_n = -k\cdot S + k^2\cdot I_n = -k\cdot\left(S - k\cdot I_n\right)$ .

Inductiv va rezulta că $\left(S - k\cdot I_n\right)^m = \left(-k\right)^{m-1}\cdot\left(S - k\cdot I_n\right)$, $\forall m\in\mathbb{N}^*$ $(2)$ .

Fie $\lambda = \lambda_i$, $i\in\left\{1,2,...,n\right\}$ o valoare proprie oarecare a matricei $S$, adică sistemul omogen $S\cdot X = \lambda\cdot X$, admite și soluții nenule $X\in M_{n,1}\left(\mathbb{R}\right)$ ( vectori proprii), iar $\det\left(S - \lambda\cdot I_n\right) = f\left(\lambda\right) = 0$ , unde $f$ este polinomul caracteristic asociat matricei $S$ . Din $S\cdot X = \lambda\cdot X$, prin înmulțire la stânga cu $S$ avem $S^2\cdot X = \lambda\cdot S\cdot X$, de unde, ținând cont de $(1)$ , rezultă $k\cdot S\cdot X = \lambda\cdot S\cdot X$ , deci $k\cdot S\cdot X = \lambda^2\cdot X$ , adică $S\cdot X = \frac{\lambda^2}{k}\cdot X$ , de unde rezultă că $\frac{\lambda^2}{k} = \lambda$ , și de aici , $\lambda\in\left\{0\,,\,k\right\}$ .

Pe de altă parte , din ipoteză, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = Tr\left(S\right) = n\cdot k$ , deci va rezulta că toate valorile proprii sunt egale: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = k$ , deci polinomul caracteristic al matricei $S$ va avea forma $f = \left(-1\right)^n\left(X - k\right)^n\in\mathbb{R}\left[X\right]$ . Din teorema lui Cayley-Hamilton va rezulta că $\left(S - kI_n\right)^n = O_n$ , de unde, ținând cont de $(2)$ , rezultă că $\left(-k\right)^{n-1}\cdot\left(S - k\cdot I_n\right) = O_n$ , adică $S = k\cdot I_n$ .